34 Bsp. 34

$$x_{n+1} = x_n - \frac{1}{D|_{Pn}} * det \begin{vmatrix} f & f_y \\ g & g_y \end{vmatrix} \quad y_{n+1} = y_n - \frac{1}{D|_{Pn}} * det \begin{vmatrix} f_x & f \\ g_x & g \end{vmatrix} \quad D|_{Pn} = det \begin{vmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{vmatrix} \tag{34.1}$$

$$\begin{matrix} x^2 + 2\cos y = 2 \\ 2x^2 + y^2 = 3 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} f(x,y) = x^2 + 2\cos y - 2 \\ g(x,y) = 2x^2 + y^2 - 3 \end{matrix} \qquad P_0 = (-1, 1) \tag{34.2}$$

Um in die Formeln einsetzen zu können bilden wir zuerst die Ableitungen

$$\begin{matrix} f_x = 2x & g_x = 4x \\ f_y = -2\sin y & g_y = 2y \end{matrix} \tag{34.3}$$

Um den ersten Iterationsschritt zu berechnen fehlt nur noch $D|_P 0$.

$$D|_{P0} = det \begin{vmatrix} -2 & -2\sin 1 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = 10,731768 \tag{34.4}$$

$$x_1 = -1 - \frac{1}{10,731768} * det \begin{vmatrix} 2\cos 1 - 1 & -2\sin 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -0,984978 \tag{34.5}$$

$$y_1 = 1 - \frac{1}{10,731768} * det \begin{vmatrix} -2 & 2\cos 1 - 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 1.030043 \tag{34.6}$$

Somit erhält man

$$P_1 = (-0,984978/1.030043) \tag{34.7}$$

Um P_2 zu berechnen werden die selben Rechenschritte wiederholt mit den Werten von P_1.

$$D|_{P1} = det \begin{vmatrix} -1.969956 & -1,714642 \\ -3,939912 & 2,060086 \end{vmatrix} = 10,813818 \tag{34.8}$$

$$x_2 = -0,984978 - \frac{1}{10,813818} * det \begin{vmatrix} -0,000254 & -1,714642 \\ 0,001352 & 2,060086 \end{vmatrix} = -0,984639 \tag{34.9}$$

$$y_2 = 1.030043 - \frac{1}{10,813818} * det \begin{vmatrix} 1.969956 & -0,000254 \\ 3,939912 & 0,001352 \end{vmatrix} = 1.030382 \tag{34.10}$$

Somit erhält man

$$P_2 = (-0,984639/1.030382) \tag{34.11}$$

35 Bsp. 35

Die Zeilen einer Matrix werden im folgenden mit Z_1-Z_n bezeichnet.

a)

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 2 \\ 1 & 5 & 5 \\ -1 & 0 & 7 \end{pmatrix} \tag{35.1}$$

Sind alle Hauptminoren α von A ungleich Null, dann besitzt A eine LR-Zerlegung ohne Zeilenvertauschung.

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} -2 \end{pmatrix} \longrightarrow det\alpha_1 = -2 \tag{35.2}$$

$$\alpha_2 = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \longrightarrow det\alpha_2 = -6 \tag{35.3}$$

$$\alpha_3 = \begin{pmatrix} -2 \end{pmatrix} * det \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \end{pmatrix} * det \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix} * det \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow det\alpha_3 = -12 \tag{35.4}$$

Da alle Hauptminoren ungleich Null sind, kann begonnen werden A auf Zeilenstufenform zu bringen
$A \longrightarrow Z_2 + Z_1 * \frac{1}{2} \longrightarrow Z_3 + Z_1 * -\frac{1}{2} \longrightarrow Z_3 + Z_2 * -\frac{2}{3}$

$$\begin{pmatrix} -2 & -4 & 2 \\ 1 & 5 & 5 \\ -1 & 0 & 7 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -2 & -4 & 2 \\ 0 & 3 & 6 \\ -1 & 0 & 7 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -2 & -4 & 2 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -2 & -4 & 2 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = R \tag{35.5}$$

Die quadratische Matrix L erhält man, wenn man in der Hauptdiagonale jeweils 1 einträgt und in die Spalten darunter jeweils die negativen Faktoren, die beim umformen von A zu R verwendet wurden

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix} \tag{35.6}$$

Um zu prüfen, ob die Umformung korrekt war, kann man $R * L = A$ benutzen

$$\begin{matrix} & \begin{pmatrix} -2 & -4 & 2 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -2 & -4 & 2 \\ 1 & 5 & 5 \\ -1 & 0 & 7 \end{pmatrix} = A \end{matrix}$$

b)

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 9 \end{pmatrix} \tag{35.7}$$

$$\beta_1 = \begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix} \longrightarrow det\beta_1 = -2 \tag{35.8}$$

$$\beta_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow det\beta_2 = 0 \tag{35.9}$$

Da eine der Hauptminoren β von B Null ist, ist eine Zeilenvertauschung nötig.
$B \longrightarrow Z_2 + Z_1 * -1 \longrightarrow Z_3 + Z_1 * -2$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 9 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \\ 4 & 3 & 9 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{35.10}$$

Durch Vertauschung von Z_2 und Z_3 von A sowie einer Einheitsmatrix erhält man R und die dazugehörige Permutationsmatrix P^t

$$R = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, P^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{35.11}$$

Setzt man die negativen Faktoren, die für die Umformung benötigt wurden, in eine quadratische Matrix mit der Hauptdiagonale von jeweils 1 ein erhält man

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{35.12}$$

Da bei der Umformung in einem Schritt 2 Nullen erzeugt wurden und ein dritter Umformungsschritt somit nicht nötig war, bleibt dieser Wert auch in L Null.

Für die Probe werden erneut L und R multipliziert, nur diesmal ebenfalls mit der Permutationsmatrix wodurch sich $L * P^t * R = B$ ergibt

$$\begin{array}{ccc} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 9 \end{pmatrix} = B \end{array}$$

c)

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \tag{35.13}$$

$$\gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix} \longrightarrow det\gamma_1 = 0 \tag{35.14}$$

Da eine der Hauptminoren γ von C Null ist, ist eine Zeilenvertauschung nötig.
Durch Vertauschung von $Z_2 \leftrightarrow \ Z_3$ und $Z_1 \leftrightarrow \ Z_3$ erhält man

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \tag{35.15}$$

$C^t \longrightarrow Z_4 + Z_1 * -2 \longrightarrow Z_4 + Z_2 * \frac{3}{2} \longrightarrow Z_4 + Z_3 * -\frac{1}{2}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = R \tag{35.16}$$

Durch einsetzen der negativen Faktoren und der Zeilenvertauschung ergibt sich für L und P^t

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}, P^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{35.17}$$

Für die Probe wird wieder $L * P^t * R = C$ verwendet

$$\begin{array}{ccc} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = C \end{array}$$

36 Bsp. 36

Die Zeilen einer Matrix werden im folgenden mit Z_1-Z_n bezeichnet.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \tag{36.1}$$

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 3 \end{pmatrix} \longrightarrow det\alpha_1 = 3 \tag{36.2}$$

$$\alpha_2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow det\alpha_2 = 5 \tag{36.3}$$

$$\alpha_3 = \begin{pmatrix} 3 \end{pmatrix} * det \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \end{pmatrix} * det \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \end{pmatrix} * det \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \longrightarrow det\alpha_3 = 28 \tag{36.4}$$

Da alle Hauptminoren ungleich Null sind, ist keine Zeilenvertauschung nötig.
$A \longrightarrow Z_2 + Z_1 * \frac{1}{3} \longrightarrow Z_3 + Z_1 * -\frac{2}{3} \longrightarrow Z_3 + Z_2 * 2$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 0 & \frac{5}{3} & \frac{10}{3} \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 0 & \frac{5}{3} & \frac{10}{3} \\ 0 & -\frac{10}{3} & -\frac{8}{3} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 0 & \frac{5}{3} & \frac{10}{3} \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = R \tag{36.5}$$

Durch einsetzen der negativen Umformungsfaktoren ergibt sich für L

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & -2 & 1 \end{pmatrix} \tag{36.6}$$

Durch $L * \vec{y} = \vec{b}$ kann man den Störvektor $\vec{y}$ berechnen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & -2 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{aligned} y_1 &= 4 \\ y_2 &= \frac{10}{3} \\ y_3 &= 8 \end{aligned} \tag{36.7}$$

Durch $R * \vec{x} = \vec{y}$ kann man $\vec{x}$ berechnen

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 0 & \frac{5}{3} & \frac{10}{3} \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ \frac{10}{3} \\ 8 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{aligned} x_1 &= \text{-2} \\ x_2 &= \text{-2} \\ x_3 &= 2 \end{aligned} \longrightarrow \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \vec{x} \tag{36.8}$$

37 Bsp. 37

Das Skalarprodukt zweier Vektoren wird im folgenden mit <(),()> dargestellt.

a)
Um Q zu erhalten, werden 3 orthogonale Spakltenvektoren $\vec{q_1}, \vec{q_2}, \vec{q_3}$ berechnet und R ist gegeben durch $R = Q^t * A$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{37.1}$$

Für $\vec{q_1}$ wird der erste Splaltenvektor von A verwendet und normiert

$$\vec{a_1^*} = \vec{q_1^*} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{q_1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{37.2}$$

Der Vektor $\vec{q_2^*}$, der orthogonal auf $\vec{q_1^*}$ steht, ist gegeben durch

$$\vec{q_2^*} = \vec{a_2^*} - \frac{< \vec{a_2^*}, \vec{q_1^*} >}{< \vec{q_1^*}, \vec{q_1^*} >} * \vec{q_1^*} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{< \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} >}{< \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} >} * \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \tag{37.3}$$

$$\vec{q_2^*} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{3} * \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{q_2} = \frac{1}{\sqrt{6}} * \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{37.4}$$

Der Vektor $\vec{q_3^*}$, der orthogonal auf $\vec{q_1^*}$ und $\vec{q_2^*}$ steht, ist gegeben durch

$$\vec{q_3^*} = \vec{a_3^*} - \frac{< \vec{a_3^*}, \vec{q_1^*} >}{< \vec{q_1^*}, \vec{q_1^*} >} * \vec{q_1^*} - \frac{< \vec{a_3^*}, \vec{q_2^*} >}{< \vec{q_2^*}, \vec{q_2^*} >} * \vec{q_2^*} \tag{37.5}$$

$$\vec{q_3^*} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{< \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} >}{< \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} >} * \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{< \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} >}{< \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} >} * \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{37.6}$$

$$\vec{q_3^*} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} - \frac{2}{3} * \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{6} * \begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ \\ \frac{1}{2}\\ \\ \frac{1}{2}\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \vec{q_3} = \frac{1}{\sqrt{2}} * \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \tag{37.7}$$

Setzt man $\vec{q_1}, \vec{q_2}, \vec{q_3}$ zu einer Matrix zusammen so erhält man Q

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \tag{37.8}$$

Um Q^t zu erhalten werden Zeilen und Spalten von Q getauscht

$$\begin{array}{ccc} & & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ R = Q^t * A = & \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \frac{2}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = R \end{array}$$

b)

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{37.9}$$

Für $\vec{q_1}$ wird der erste Splaltenvektor von B verwendet und normiert.

$$\vec{b_1^*} = \vec{q_1^*} \begin{pmatrix}1\\0\\2\\1\\0\end{pmatrix}, \vec{q_1} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix}1\\0\\2\\1\\0\end{pmatrix} \tag{37.10}$$

Der Vektor $\vec{q_2^*}$ der orthogonal auf $\vec{q_1^*}$ steht, ist gegeben durch

$$\vec{q_2^*} = \vec{b_2^*} - \frac{<\vec{b_2^*}, \vec{q_1^*}>}{<\vec{q_1^*}, \vec{q_1^*}>} * \vec{q_1^*} = \begin{pmatrix}2\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix} - \frac{<\begin{pmatrix}2\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\2\\1\\0\end{pmatrix}>}{<\begin{pmatrix}1\\0\\2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\2\\1\\0\end{pmatrix}>} * \begin{pmatrix}1\\0\\2\\1\\0\end{pmatrix} = \tag{37.11}$$

$$\vec{q_2^*} = \begin{pmatrix}2\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix} - \frac{1}{2} * \begin{pmatrix}1\\0\\2\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\1\\-1\\\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}3\\2\\-2\\1\\0\end{pmatrix}, \vec{q_2} = \frac{1}{\sqrt{18}} * \begin{pmatrix}3\\2\\-2\\1\\0\end{pmatrix} \tag{37.12}$$

Der Vektor $\vec{q_3^*}$ der orthogonal auf $\vec{q_1^*}$ und $\vec{q_2^*}$ steht, ist gegeben durch

$$\vec{q_3^*} = \vec{b_3^*} - \frac{<\vec{b_3^*}, \vec{q_1^*}>}{<\vec{q_1^*}, \vec{q_1^*}>} * \vec{q_1^*} - \frac{<\vec{b_3^*}, \vec{q_2^*}>}{<\vec{q_2^*}, \vec{q_2^*}>} * \vec{q_2^*} \tag{37.13}$$

$$\vec{q_3^*} = \begin{pmatrix}0\\0\\-1\\0\\1\end{pmatrix} - \frac{<\begin{pmatrix}0\\0\\-1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\2\\1\\0\end{pmatrix}>}{<\begin{pmatrix}1\\0\\2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\2\\1\\0\end{pmatrix}>} * \begin{pmatrix}1\\0\\2\\1\\0\end{pmatrix} - \frac{<\begin{pmatrix}0\\0\\-1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\2\\-2\\1\\0\end{pmatrix}>}{<\begin{pmatrix}3\\2\\-2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\2\\-2\\1\\0\end{pmatrix}>} * \begin{pmatrix}3\\2\\-2\\1\\0\end{pmatrix} \tag{37.14}$$

$$\vec{q_3^*} = \begin{pmatrix}0\\0\\-1\\0\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{3} * \begin{pmatrix}1\\0\\2\\1\\0\end{pmatrix} - \frac{1}{9} * \begin{pmatrix}3\\2\\-2\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-\frac{2}{9}\\-\frac{1}{9}\\\frac{2}{9}\\1\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}0\\-2\\-1\\2\\9\end{pmatrix}, \vec{q_3} = \frac{1}{3 * \sqrt{10}} * \begin{pmatrix}0\\-2\\-1\\2\\9\end{pmatrix} \tag{37.15}$$

Setzt man $\vec{q_1}, \vec{q_2}, \vec{q_3}$ zu einer Matrix zusammen, so erhält man Q

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{3} & -\frac{2}{3*\sqrt{10}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{\sqrt{2}}{3} & -\frac{1}{3*\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{18}} & \frac{2}{3*\sqrt{10}} \\ 0 & 0 & \frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix} \tag{37.16}$$

R ist gegeben durch $R = Q^t * B$

$$\begin{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{2}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3*\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3*\sqrt{10}} & -\frac{1}{3*\sqrt{10}} & \frac{2}{3*\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \sqrt{6} & \frac{\sqrt{6}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{3} \\ 0 & \frac{3}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{2}}{3} \\ 0 & 0 & \frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix} = R \end{matrix}$$

38 Bsp. 38

$$\begin{array}{rrrl} 3x_1 & +x_2 & & = 1 \\ x_1 & +4x_2 & +x_3 & = 1 \\ & x_2 & +3x_3 & = 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r} x_1 = 0.3 \\ Exakt: x_2 = 0.1 \\ x_3 = 0.3 \end{array} \tag{38.1}$$

Formt man die Gleichungen jeweils nach x_1, x_2, x_3 um, erhält man

$$x_1 = \frac{1-x_2}{3} \qquad x_2 = \frac{1-x_1-x_3}{4} \qquad x_3 = \frac{1-x_2}{3} \tag{38.2}$$

Als Startvektor wird der $\vec{0}$ verwendet und für jeden weiteren Iterationsschritt die Werte für x_1, x_2, x_3, die im vorherigen errechnet wurden.

	0	I	II	III	IV	V
x_1	0	$\frac{1}{3}$	0,25	0,305556	0,291667	0,300926
x_2	0	$\frac{1}{4}$	0,083333	0,125	0,097222	0,104167
x_3	0	$\frac{1}{3}$	0,25	0,305556	0,291667	0,300926

39 Bsp. 39

Der Unterschied zur Jacobi-Iteration besteht bei Gauß-Seidel darin, dass pro Iterationsschritt nicht x_1, x_2, x_3 des vorherigen Schrittes zur Berechnung herangezogen werden, sondern die Werte ersetzt werden sobald ein neuer berechnet wurde.
Sobald man also x_1 berechnet hat wird der neue Wert für x_1 für die Berechnung von x_2 verwendet.

	0	I	II	III	IV
x_1	0	$\frac{1}{3}$	0,277778	0,296296	0,299383
x_2	0	0,166667	0,111111	0,101852	
x_3	0	0,277778	0,296296	0,299383	

Da alle Werte sofort ersetzt werden und nicht erst nach Beendigung eines Iterationsschrittes, konvergiert die Gauß-Seidel-Iteration auch schneller.

40 Bsp. 40

Die Zeilen einer Matrix werden im folgenden mit Z_1-Z_n bezeichnet.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad b \in \mathbb{R}^3 \qquad A\vec{x} = \vec{b} \tag{40.1}$$

$det|(S^{-1}T) - \lambda \mathrm{I}| \stackrel{!}{=} 0$

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} T = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{40.2}$$

Um S^{-1} zu erhalten, wird S nun so lange umgeformt bis sie einer Einheitsmatrix gleicht.
Im ersten Schritt bringt man S mit $Z_2 + Z_1$, $Z_3 + Z_1$ sowie $Z_3 - Z_2$ auf Zeilen-Stufen-Form

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right| \longrightarrow \left|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right| \longrightarrow \left|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right| \tag{40.3}$$

Dividiert man nun Z_2 und Z_3 durch 2 gleicht S einer Einheitsmatrix

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right| \longrightarrow S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \tag{40.4}$$

$$S^{-1} * T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \tag{40.5}$$

Nun zieht man λ von der Hauptdiagonale ab und erhält

$$det|(S^{-1}T) - \lambda I| \stackrel{!}{=} 0 : \begin{pmatrix} -\lambda & -1 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{2} - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} - \lambda \end{pmatrix} \tag{40.6}$$

Zur Bestimmung der Eigenwerte berechnet man die Determinante und setzt diese 0 gleich

$$\begin{aligned} & -\lambda * (-\tfrac{1}{2} - \lambda) * (-\tfrac{1}{2} - \lambda) \stackrel{!}{=} 0 \qquad \lambda_1 = 0 \\ & -\lambda * (\lambda^2 + \lambda + \tfrac{1}{4}) \stackrel{!}{=} 0 \\ & \lambda_{2,3} = -\tfrac{1}{2} \pm \sqrt{\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{4}} \qquad \lambda_2 = -\tfrac{1}{2} \\ & \qquad \lambda_3 = -\tfrac{1}{2} \end{aligned} \tag{40.7}$$

Um die Konvegenz zu verifizieren muss $|\lambda_n| < 1$ für alle λ erfüllt sein

$$\begin{aligned} & |\lambda_1| = 0 < 1 \\ & |\lambda_2| = \tfrac{1}{2} < 1 \qquad \longrightarrow konvergiert \\ & |\lambda_3| = \tfrac{1}{2} < 1 \end{aligned} \tag{40.8}$$

41 Bsp. 41

Die Pseudoinverse einer Matrix a ist gegeben durch $A^* = (A^t * A)^{-1} * A^t$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow A^t * A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \tag{41.1}$$

$$(A^t * A)^{-1} = \frac{1}{45} * \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \tag{41.2}$$

$$(A^t * A)^{-1} * A^t = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & 0 \end{pmatrix} = A^* \tag{41.3}$$

42 Bsp. 42

Für die Näherungslösung mittels Pseudoinverse verwendet man $\vec{x} = A^* * \vec{b}$

$$\begin{matrix} x - y = 3 \\ -x + y = 2 \\ 2x - y = 1 \end{matrix} \longrightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{42.1}$$

$$A^t * A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \tag{42.2}$$

$$(A^t * A)^{-1} = \frac{1}{2} * \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \tag{42.3}$$

$$(A^t * A)^{-1} * A^t = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = A^* \tag{42.4}$$

$$\vec{x} = A^* * \vec{b} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{x} \tag{42.5}$$

43 Bsp. 43

Das Skalarprodukt zweier Vektoren wird im folgenden mit $<(),()>$ dargestellt.

$$\begin{matrix} x - y = 3 \\ -x + y = 2 \\ 2x - y = 1 \end{matrix} \longrightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{43.1}$$

Für $\vec{q_1}$ wird der erste Splaltenvektor von A verwendet und normiert

$$\vec{a_1^*} = \vec{q_1^*} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{q_1} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{43.2}$$

Der Vektor $\vec{q_2^*}$, der orthogonal auf $\vec{q_1^*}$ steht, ist gegeben durch

$$\vec{q_2^*} = \vec{a_2^*} - \frac{<\vec{a_2^*}, \vec{q_1^*}>}{<\vec{q_1^*}, \vec{q_1^*}>} * \vec{q_1^*} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{<\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}>}{<\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}>} * \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \tag{43.3}$$

$$\vec{q_2^*} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{2}{3} * \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{q_2} = \frac{1}{\sqrt{3}} * \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{43.4}$$

R ist gegeben durch $R = Q^t * A$

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \longrightarrow R = Q^t * A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{6} & -\frac{4}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = R \tag{43.5}$$

$\vec{x}$ lässt sich mit $R\vec{x} = Q^t\vec{b}$ berechnen

$$Q^t\vec{b} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{6}} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{43.6}$$

$$R\vec{x} = Q^t\vec{b} : \begin{pmatrix} \sqrt{6} & -\frac{4}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{6}} \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{matrix} x_1 = \frac{3}{\sqrt{6}*\sqrt{6}} = \frac{1}{2} \\ x_2 = 0 \end{matrix} \longrightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{43.7}$$

44 Bsp. 44

m	x_i	y_i	x_i^2	x_i^3	x_i^4	x_iy_i	$x_i^2y_i$
1	4,0	102	16	64	256	408	1632
2	4,5	130	20,25	91,125	410,0625	585	2632,5
3	5,1	167	26,01	132,651	676,5201	851,7	4343,67
4	5,9	224	34,81	205,379	1211,7361	1321,6	7797,44
5	6,3	256	39,69	250,047	1575,2961	1612,8	10160,64
5	7,1	326	50,41	357,911	2541,1681	2314,6	16433,66
$\sum$	32,9	1205	187,26	1101,113	6670,7829	7093,7	42999,91

$$Ansatz : y = a + bx \tag{44.1}$$

Die Ausgleichsgerade ist gegeben durch

$$a = \frac{(\sum\limits_{i=1}^{m} x_i^2)(\sum\limits_{i=1}^{m} y_i) - (\sum\limits_{i=1}^{m} x_i y_i)(\sum\limits_{i=1}^{m} x_i)}{m\sum\limits_{i=1}^{m} x_i^2 - (\sum\limits_{i=1}^{m} x_i)^2} \qquad b = \frac{m\sum\limits_{i=1}^{m} x_i y_i - (\sum\limits_{i=1}^{m} x_i)(\sum\limits_{i=1}^{m} y_i)}{m\sum\limits_{i=1}^{m} x_i^2 - (\sum\limits_{i=1}^{m} x_i)^2} \tag{44.2}$$

Setzt man die gegeben Werte in die Gleichungen ein, erhält man

$$y_1 = 70,90401x - 187,956987 \tag{44.3}$$

Der Ansatz für das Polynom 2. Grades lautet

$$y_2 = a_0 + a_1 x * a_2 x^2 \tag{44.4}$$

Für alle Polynome ab dem 2. Grad gilt

$$a_0 \sum_{i=1}^{m} x_i^n + a_1 \sum_{i=1}^{m} x_i^{n+1} + a_2 \sum_{i=1}^{m} x_i^{n+2} + ... + a_n \sum_{i=1}^{m} x_i^{2n} = \sum_{i=1}^{m} y_i x_i^n \tag{44.5}$$

Dies liefert n + 1 lineare Gleichungen, von denen man 3 benötigt um a_0, a_1, a_2 zu berechnen

$$a_0 \sum_{i=1}^{m} x_i^0 + a_1 \sum_{i=1}^{m} x_i^1 + a_2 \sum_{i=1}^{m} x_i^2 = \sum_{i=1}^{m} y_i x_i^0 \tag{44.6}$$

$$a_0 \sum_{i=1}^{m} x_i^1 + a_1 \sum_{i=1}^{m} x_i^2 + a_2 \sum_{i=1}^{m} x_i^3 = \sum_{i=1}^{m} y_i x_i^1 \tag{44.7}$$

$$a_0 \sum_{i=1}^{m} x_i^2 + a_1 \sum_{i=1}^{m} x_i^3 + a_2 \sum_{i=1}^{m} x_i^4 = \sum_{i=1}^{m} y_i x_i^2 \tag{44.8}$$

Setzt man in die Gleichungen ein, erhält man

$$\begin{array}{l} 6\ a_0\ +\ 32{,}9\ a_1\ +\ 187{,}26\ a_2\ =\ 1205 \\ 32{,}9\ a_0\ +\ 187{,}26\ a_1\ +1001{,}113\ a_2\ =\ 7093{,}7 \\ 187{,}26\ a_0\ +\ 1001{,}113\ a_1\ +\ 6670{,}7829\ a_2\ =\ 42999.91 \end{array} \tag{44.9}$$

Lösen des Gleichungssystems $\longrightarrow Z_1 * \frac{1}{6}$

$$\left|\begin{array}{ccc|c} 6 & 32{,}9 & 187{,}26 & 1205 \\ 32{,}9 & 187{,}26 & 1101{,}113 & 7093{,}7 \\ 187{,}26 & 1101{,}113 & 6670{,}7829 & 42999.91 \end{array}\right| \longrightarrow \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 5{,}483333 & 31{,}21 & 200{,}833333 \\ 32{,}9 & 187{,}26 & 1101{,}113 & 7093{,}7 \\ 187{,}26 & 1101{,}113 & 6670{,}7829 & 42999.91 \end{array}\right| \tag{44.10}$$

$Z_2 - Z_1 * 32,9 \longrightarrow Z_3 - Z_1 * 187,26$

$$\left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 5{,}483333 & 31{,}21 & 200{,}833333 \\ 0 & 6{,}848344 & 74{,}304 & 486{,}283344 \\ 187{,}26 & 1101{,}113 & 6670{,}7829 & 42999.91 \end{array}\right| \longrightarrow \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 5{,}483333 & 31{,}21 & 200{,}833333 \\ 0 & 6{,}848344 & 74{,}304 & 486{,}283344 \\ 0 & 74{,}304062 & 826.3983 & 5391{,}860062 \end{array}\right| \tag{44.11}$$

$Z_2 * \frac{1}{6{,}848344} \longrightarrow Z_3 - Z_2 * 74,304062$

$$\left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 5{,}483333 & 31{,}21 & 200{,}833333 \\ 0 & 1 & 10{,}849922 & 71{,}007435 \\ 0 & 74{,}304062 & 826.3983 & 5391{,}860062 \end{array}\right| \longrightarrow \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 5{,}483333 & 31{,}21 & 200{,}833333 \\ 0 & 1 & 10{,}849922 & 71{,}007435 \\ 0 & 0 & 20{,}205023 & 115{,}719209 \end{array}\right| \tag{44.12}$$

$Z_3 * \frac{1}{20{,}205023}$

$$\left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 5{,}483333 & 31{,}21 & 200{,}833333 \\ 0 & 1 & 10{,}849922 & 71{,}007435 \\ 0 & 0 & 1 & 5{,}72725 \end{array}\right| \longrightarrow \begin{array}{l} a_2 = 5{,}72725 \\ a_1 = 8{,}867219 \\ a_0 = \text{-}29.728253 \end{array} \tag{44.13}$$

Woraus sich für y_2 ergibt

$$y_2 = 5,72725x^2 + 8,867219x - 29,728253 \tag{44.14}$$

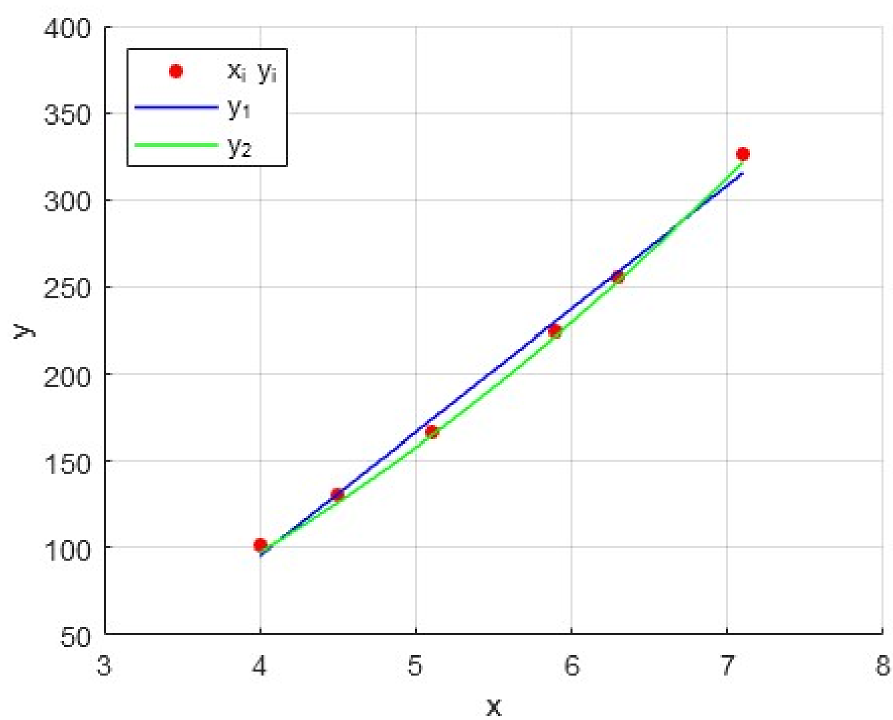

Abbildung 44.1: Skizze: $x_i y_i, y_1, y_2$

45 Bsp. 45

m	x_i	y_i	$x_i^2 = u_i$	$x_i^4 = u_i^2$	$x_i y_i$	$y_i x_i^2 = y_i u_i$
1	-1	3,1	1	1	-3,1	3,1
2	-0,5	2,2	0,25	0,625	-1,1	0,55
3	0	0,9	0	0	0	0
4	0,5	1,4	0,25	0,625	0,7	0,35
5	1	2,9	1	1	2,9	2,9
$\sum$	0	10,5	2,5	2,125	-0,6	6,9

a)
Ansatz: $f_1(x) = ax + b$

$$a = \frac{m \sum\limits_{i=1}^{m} x_i y_i - (\sum\limits_{i=1}^{m} x_i)(\sum\limits_{i=1}^{m} y_i)}{m \sum\limits_{i=1}^{m} x_i^2 - (\sum\limits_{i=1}^{m} x_i)^2} \qquad b = \frac{(\sum\limits_{i=1}^{m} x_i^2)(\sum\limits_{i=1}^{m} y_i) - (\sum\limits_{i=1}^{m} x_i y_i)(\sum\limits_{i=1}^{m} x_i)}{m \sum\limits_{i=1}^{m} x_i^2 - (\sum\limits_{i=1}^{m} x_i)^2} \tag{45.1}$$

Eingesetzt ergibt sich

$$f_1(x) = -0,24x + 2,1 \tag{45.2}$$

b)
Ansatz: $f_2(x) = ax^2 + b \longrightarrow a_0 + a_2 x^2 \longrightarrow Substitution : u = x^2$
Da $a_1 = 0$ fallen einige Terme aus den Gleichungen heraus, wodurch noch folgendes übrig bleibt

$$a_0 \sum_{i=1}^{m} x_i^0 + a_2 \sum_{i=1}^{m} u_i^1 = \sum_{i=1}^{m} y_i x_i^0 \tag{45.3}$$

$$a_0 \sum_{i=1}^{m} u_i^1 + a_2 \sum_{i=1}^{m} u_i^2 = \sum_{i=1}^{m} y_i u_i^1 \tag{45.4}$$

Eingesetzt ergibt sich somit $\longrightarrow Z_1 * \frac{1}{5} \rightarrow Z_2 - Z_1 * 2,5$

$$\begin{array}{l} 5\ a_0 + 2{,}5\ a_2 = 10{,}5 \\ 2{,}5\ a_0 + 2{,}125\ a_2 = 6{,}9 \end{array} \longrightarrow \left|\begin{array}{cc|c} 5 & 2{,}5 & 10{,}5 \\ 2{,}5 & 2{,}125 & 6{,}9 \end{array}\right| \longrightarrow \left|\begin{array}{cc|c} 1 & 0{,}5 & 2{,}1 \\ 0 & 0{,}875 & 1{,}65 \end{array}\right| \tag{45.5}$$

$Z_2 * \frac{1}{0{,}875}$

$$\left|\begin{array}{cc|c} 1 & 0{,}5 & 2{,}1 \\ 0 & 1 & 1{,}885714 \end{array}\right| \longrightarrow \begin{array}{l} a_2 = 1{,}885714 \\ a_0 = 1{,}157143 \end{array} \tag{45.6}$$

Wodurch sich für $f_2(x)$ ergibt

$$f_2(x) = 1,885714x^2 + 1,157143 \tag{45.7}$$

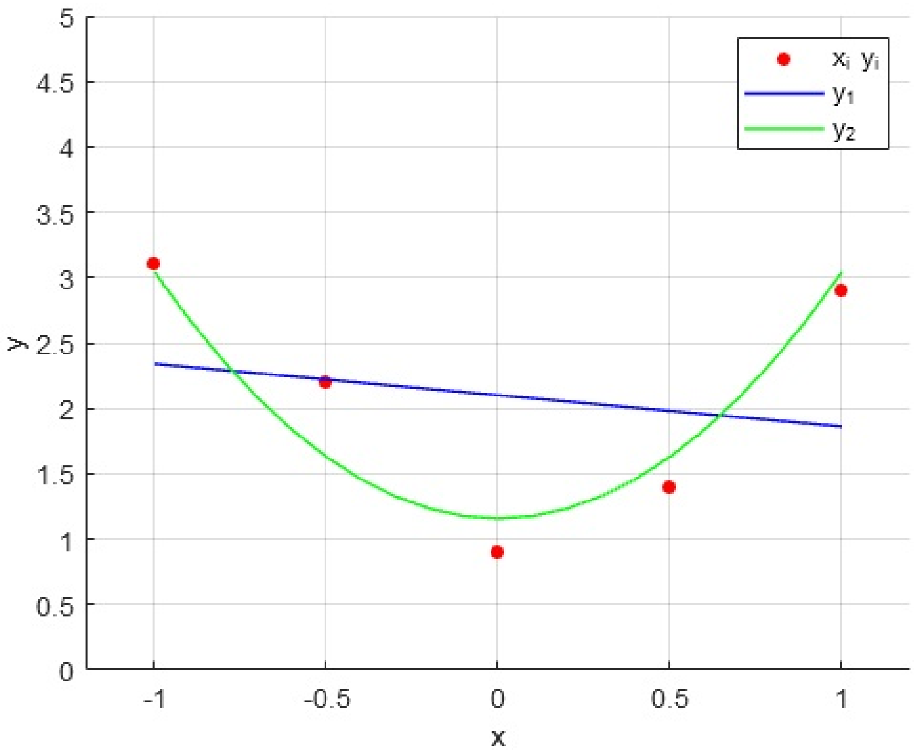

Abbildung 45.1: Skizze: $x_i y_i, y_1, y_2$